



第十五屆

網際網路程式設計全國大賽

National Problem Solving Contest on Internet

12/7

2013



國中組決賽

December 7, 2013

題目 A. 新 · 烤餅乾

題目

- 給定兩組數字。
- 問各選一個數字時第一組的數字較大的狀況數。

題目 A. 新 · 烤餅乾 (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood):
team3-及人高中 01 , 3 分鐘。
- 通過隊數: 23 。

題目 A. 新 · 烤餅乾 (cont.)

解題說明

- 暴力枚舉，不需排序！
- 第一組的每個數字直接與第二組的每個數字相比 (總共會比 36 次)

題目 B. 蚯蚓搬家問題

題目

- 你有 N 瓶酒。第 i 瓶要換到位置 a_i ，重量 w_i 。
- 一次可以任選兩瓶酒交換。費用為兩瓶酒的 **重量和**。
- 問把東西換到指定的位置的最小費用。

題目 B. 蚯蚓搬家問題 (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood): None °
- 通過隊數: None °

題目 B. 蚯蚓搬家問題 (cont.)

解題說明

- 置換的狀況可以表示成

$$i \rightarrow a_i \rightarrow a_{a_i} \rightarrow \dots$$

- 每個物品都會換到一個指定的位置。有恰好 1 個東西換到他現在的位置。
→ 置換的關係會形成一個圈。

題目 B. 蚯蚓搬家問題 (cont.)

- 也就是說，假設 a 要換到位置 b ，位置 b 的要換 c ，...，最後會換回 a 。

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow \dots \rightarrow a$$

- 我們可以把這關係表示成 $(a\ b\ c\ \dots)$ 。這東西在數學上稱為置換群 (permutation group)。

題目 B. 蚯蚓搬家問題 (cont.)

- 對於一個有 n 個元素的置換群 p ，從最後一個 a 開始往前換，則費用為

$$\begin{aligned} & (w_a + w_b) + (w_a + w_c) + \dots \\ & = (n - 2)w_a + \sum_{i \in p} w_i \end{aligned}$$

- 顯然每個元素都至少會被換一次，所以後面的 $\sum w_i$ 是固定的。
- 最優策略則是選擇較小的 w_a 開始換。

題目 B. 蚯蚓搬家問題 (cont.)

- 如果改變交換的順序則會產生更複雜的式子，但最優的狀況下只會交換 $n - 1$ 次，所以可以放在一起比較。
- 而上述的式子可以輕易證明是最優。

題目 B. 蚯蚓搬家問題 (cont.)

- 可是讓我們看看下面這個例子

```
5
1 3 4 5 2
1 99 99 99 99
```

答案為 500 。可是如果只用上述的策略則會算出 594 。

- 這個例子的置換群為 $(1)(2\ 3\ 4\ 5)$ 。
- 可以發現，如果只考慮該置換群內最小的 w ，並不會最好。

題目 B. 蚯蚓搬家問題 (cont.)

- 新想法：把目前最輕的酒瓶拿進來替換，最後再換回去。
- 令置換群 p 內的最輕重量為 $m_p = \min_{i \in p} w_i$ ，
令全部的酒裡面最輕重量為 m_{all} 。
- 這個策略的花費為

$$2(m_{\text{all}} + m_p) + (n - 2)m_{\text{all}} + \sum_{i \in p} w_i$$

題目 B. 蚯蚓搬家問題 (cont.)

- 最後對於每一個置換群，考慮兩個 Case 如下，都擇最優即可

1

$$(n - 2)m_p + \sum_{i \in p} w_i$$

2

$$2(m_{\text{all}} + m_p) + (n - 2)m_{\text{all}} + \sum_{i \in p} w_i$$

題目 B. 蚯蚓搬家問題 (cont.)

常見錯誤

- 漏考慮第二種 case (範例沒有)。
→ No - Wrong Answer ◦
- 每次找一個置換群就掃過全部的酒瓶。
→ No - Time Limit Exceeded ◦

題目 B. 蚯蚓搬家問題 (cont.)

事實上，可以一次遍例中一次求得所有置換群的最小值。

```
1 for (int i = 0; i < N; ++i)
2   if (!visit[i])
3     for (int j = i; !visit[j]; j = next[j])
4       {
5         // j 為從 i 開始的置換群
6         // 求 wight[j] 之最小值和 sum
7         visit[j] = true;
8       }
```

題目 C. 紀念品排隊問題

題目

- 共 S 種商品以及每項商品的「份數」。
- 共 N 個人。
- 已知那 N 個人已經有哪些物品。
- 假設那 N 個人會買走他們所沒有的商品每種各一份。
- Q : N 個人都買完之後，還剩幾種商品有剩？

題目 C. 紀念品排隊問題 (cont.)

概況 (封板時)

- 第一位通過 (First Blood):
team3-及人高中 01 , 16 min ◦
- 通過隊數: 11 隊 ◦

題目 C. 紀念品排隊問題 (cont.)

解題說明

- 字串處理。
- a_i : 原本第 i 種商品共有幾份。
- c_i : 統計對於第 i 種商品有多少人擁有。
→ 第 i 種商品會有 $(N - c_i)$ 買
- 答案：共有幾個 i 滿足

$$a_i - (N - c_i) > 0$$

題目 D. 可樂，可樂，更多的可樂

題目

- A 瓶蜂蜜可樂可兌換 1 瓶生薑可樂。
- B 瓶生薑可樂可兌換 1 瓶蜂蜜可樂。
- 購買 N 瓶可樂，問兌換完所能獲得的最大數量。

題目 D. 可樂，可樂，更多的可樂 (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood):
team1-光華國中 01，143 分鐘。
- 通過隊數: 3。

題目 D. 可樂，可樂，更多的可樂 (cont.)

解題說明

- 因 $A, B > 1$ ，兌換後空瓶數量會逐漸減少！
- 枚舉所有可能的購買方法！
- 注意剩餘的兩種空瓶數量！

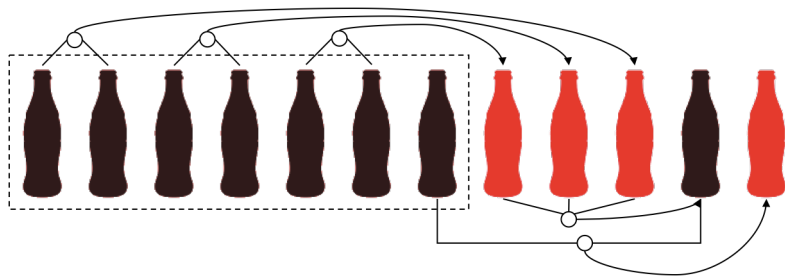
題目 D. 可樂，可樂，更多的可樂 (cont.)

常見錯誤

- 如果 $A < B$ ，買 A 的整數倍不就好了？
- 試考慮 $N = 7, A = 2, B = 3$ 的狀況：

題目 D. 可樂，可樂，更多的可樂 (cont.)

常見錯誤 (cont.)



題目 E. 可魚果餵魚問題

- 給你一個數字 N 依序減掉 $1, 2, 3, \dots$ ，直到不夠減。
- 如果剛好減到 0 就結束，否則就加上 N 再度從 1 開始減。
- 問你總共重複幾次這個過程。

題目 E. 可魚果餵魚問題 (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood):
team3-及人高中 01，64 分鐘。
- 通過隊數: 8。

題目 E. 可魚果餵魚問題 (cont.)

- 直覺：這題看起來輕鬆愉快嘛，反正要減的數值增長很快，馬上就減完了～
- 直接模擬！

題目 E. 可魚果餵魚問題 (cont.)

- No - Time Limit Exceeded

題目 E. 可魚果餵魚問題 (cont.)

- 觀察 1：設第一次不夠減時，是想要減 K 而只剩下 M 。則第二次會剩下 $2 \times M$ ，第三次剩下 $3 \times M$ ，以此類推，到剩下的數量大於等於 K 時會成功減 K 。
- 觀察 2：假設你成功減了 K 則剩下的一定不足 K ，要就結束、要就從頭開始減。

題目 E. 可魚果餵魚問題 (cont.)

- 轉化：題目變成每次加 M ，大於等於 K 時就減掉 K ，問多少次以後會歸零。
- 觀察 3：剛好歸零代表總共加的數值是 K 的倍數，而能夠加出來的又只有 M 的倍數。

題目 E. 可魚果餵魚問題 (cont.)

- 啊哈！
- 所以這題是在問，最快加了幾次 M 之後會變成 M, K 的公倍數！
- 那就是看最小公倍數嘛！

題目 E. 可魚果餵魚問題 (cont.)

Sol :

$$\text{lcm}(M, K) = M \times K / \text{gcd}(M, K)$$

$$\text{Ans} = \text{lcm}(M, K) / M = K / \text{gcd}(M, K)$$

題目 E. 可魚果餵魚問題 (cont.)

- So easy, so happy.
- 所以 Infinite Fish 是專程來騙你的 XD

題目 F. 捷運路線

題目

- 給一張 ASCII 樹狀捷運路線圖。
- 問至少要有多少幾條捷運路線可以覆蓋所有軌道。

題目 F. 捷運路線 (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood): None °
- 通過隊數: None °

題目 F. 捷運路線 (cont.)

解題說明

- 根據題目特性，捷運路網的「末梢」都只能是某條捷運路線的起點或終點。
- 因此，假設這張捷運路網的一個連通部分有 n 個「末梢」。至少要有 $\lfloor (n + 1)/2 \rfloor$ 條捷運路線才行。

題目 F. 捷運路線 (cont.)

- 使用**深/廣度優先搜索**將每一個連通部分找出來，計算末梢的數量之後依照上述計算加總就可以了。
- 一個寫法是
 - ① 找出一個井字號 '#' (一定不是「末梢」)
 - ② 從這個井字出發，每一次將相鄰四方向還沒有探索過的軌道或車站，加入考慮的佇列之中。
 - ③ 辨別「末梢」：四個方向僅有 1 個井字號的車站就是了。

題目 F. 捷運路線 (cont.)

常見錯誤

- 使用較差的方式找捷運路線，導致重複搜索路徑。
 - No - Time Limit Exceeded。

題目 G. 小可魚買點心

題目

- 有個 N 種東西的販賣列表。上有品名和單價。
- 再給 M 種東西的購買列表。上有品名和數量。
- 計算總價格，如果有購買的東西不在販賣列表內，則多輸出“NO”。

題目 G. 小可魚買點心 (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood):
team1-光華國中 01，7 分鐘。
- 通過隊數: 17。

題目 G. 小可魚買點心 (cont.)

解題說明

```
1  bool no = false; int ans = 0;
2  for (int i = 0; i < M; ++i) {
3      char name[21]; int amount;
4      scanf("%s %d", name, &amount);
5
6      bool found = false;
7      for (int j = 0; j < N; ++j)
8          if (strcmp(name, table[j]) == 0)
9              ans += prize[j] * a, found = true;
10     if (not found)
11         no = true;
12 }
```


題目 G. 小可魚買點心 (cont.)

常見錯誤

- 忘記換行。
- 輸出 Debug 用訊息。
- 輸出 “No”。
- 字串陣列開剛好 20 格，忘記多 1 格給 ‘\0’。

Thank You!